

## ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

*П.М.Калиниченко, канд.тех.наук, доц.  
Сумский государственный университет*

### ХАРАКТЕРИСТИКА МОДЕЛИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Введем модель идеальной жидкости, которая ближе существующей подходит к реальной жидкости. Суть предлагаемой модели в следующем. Это сплошная среда, состоящая из малых абсолютно подвижных друг относительно друга частиц. Взаимодействие между частицами различно в каждом из направлений. Напряжение в точке сплошной идеальной среды  $\bar{p}_n$  аналогично напряжению в вязкой жидкости. Его можно рассматривать как состоящее из нормальной  $\bar{p}_{nn}$  и касательной  $\bar{p}_{n\tau}$  составляющих, т.е.  $\bar{p}_n = \bar{p}_{nn} + \bar{p}_{n\tau}$ . Отличие предлагаемой модели от вязкой жидкости лишь в отсутствии диссипации энергии.

Обоснование физической модели идеальной жидкости можно представить на следующем примере. В общем случае движения идеальной жидкости расстояния между линиями тока изменяются, а значит, частица жидкости, ограниченная линиями тока, будет изменять свою форму. К примеру, если линии тока сходятся, частица жидкости сжимается в направлении, нормальном линиям тока, и вытягивается в направлении линии тока. Естественно предположить, что деформация частицы возможна лишь при различной величине напряжений по рассматриваемым взаимно перпендикулярным направлениям.

### ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Произвольное пространственное течение жидкости будем рассматривать в криволинейной ортогональной системе координат  $q_1, q_2, q_3$ . Ось  $q_1$  направлена вдоль линии тока.

В качестве исходных примем уравнения движения жидкости в напряжениях, векторная запись которых имеет вид

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F} + \frac{1}{\rho} \text{Div}P . \quad (1)$$

Здесь  $\bar{V}$  - вектор скорости;  $\bar{F}$  - вектор единичной массовой силы;  $P$  - тензор напряжений.

Отсутствие сил внутреннего трения в идеальной жидкости при скольжении одного слоя жидкости относительно другого вдоль поверхности тока позволяет утверждать, что взаимодействие между частицами жидкости смежных поверхностей тока происходит в направлении, нормальном поверхности тока. Поэтому плоскости, касательные в каждой точке поверхности тока, будут главными площадками, касательные напряжения на которых равны нулю. Следуя закону парности касательных напряжений, две другие площадки, перпендикулярные данной, также будут главными.

С учетом этого векторное уравнение (1) в принятой криволинейной системе координат для установившегося течения жидкости запишется в виде

$$\begin{aligned}\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{V^2}{2} &= F_1 + \frac{1}{\rho H_1} \frac{\partial p_{11}}{\partial q_1}, \\ \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{V^2}{2} + V\Omega_3 &= F_2 + \frac{1}{\rho H_2} \frac{\partial p_{22}}{\partial q_2}, \\ \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{V^2}{2} - V\Omega_2 &= F_3 + \frac{1}{\rho H_3} \frac{\partial p_{33}}{\partial q_3}.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь  $p_{11}$ ,  $p_{22}$ ,  $p_{33}$  - главные напряжения;

$$\Omega_2 = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial(VH_1)}{\partial q_3}, \quad \Omega_3 = -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial(VH_1)}{\partial q_2}\quad (3)$$

это составляющие вектора вихря скорости  $\vec{\Omega}$ .  
Главные напряжения представим в виде

$$p_{ii} = -p + p'_{ii}, \quad (4)$$

где  $p$  - напряжение в точке, не зависящее от ориентации площадки и не зависящее от деформации частицы (изменения формы);  $p'_{ii}$  - добавочные напряжения, обуславливающие деформацию частицы жидкости.

Следует заметить, что напряжение  $p$  не равно среднему арифметическому трех нормальных напряжений, а значит, не является гидродинамическим давлением. В данном подходе понятие гидродинамического давления теряет всякий смысл.

Уравнения (2) и (4) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{V^2}{2} &= F_1 - \frac{1}{\rho H_1} \frac{\partial p}{\partial q_1} + \frac{1}{\rho H_1} \frac{\partial p'_{11}}{\partial q_1}, \\ \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{V^2}{2} + V\Omega_3 &= F_2 - \frac{1}{\rho H_2} \frac{\partial p}{\partial q_2} + \frac{1}{\rho H_2} \frac{\partial p'_{22}}{\partial q_2}, \\ \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{V^2}{2} - V\Omega_2 &= F_3 - \frac{1}{\rho H_3} \frac{\partial p}{\partial q_3} + \frac{1}{\rho H_3} \frac{\partial p'_{33}}{\partial q_3}.\end{aligned}\quad (5)$$

Векторная запись уравнений (5) имеет вид

$$\text{grad} \frac{V^2}{2} + \bar{\Omega} \times \bar{V} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{1}{\rho} \text{Div} P', \quad (6)$$

где  $\text{Div} P' = \frac{1}{H_1} \frac{\partial p'_{11}}{\partial q_1} \bar{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial p'_{22}}{\partial q_2} \bar{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial p'_{33}}{\partial q_3} \bar{e}_3$ .

Установим зависимость добавочных напряжений  $p'_{ij}$  от значения скорости. Для этого получим дифференциальное уравнение деформации «жидкой» частицы.

На линии тока, по которой перемещается центр тяжести частицы жидкости, выберем точку  $O$  и примем её за полюс. В окрестности точки  $O$  на этой же линии тока возьмем произвольную точку  $K$ , радиус-вектор которой относительно точки  $O$  равен  $\Delta \bar{r}$  (рис. 1).

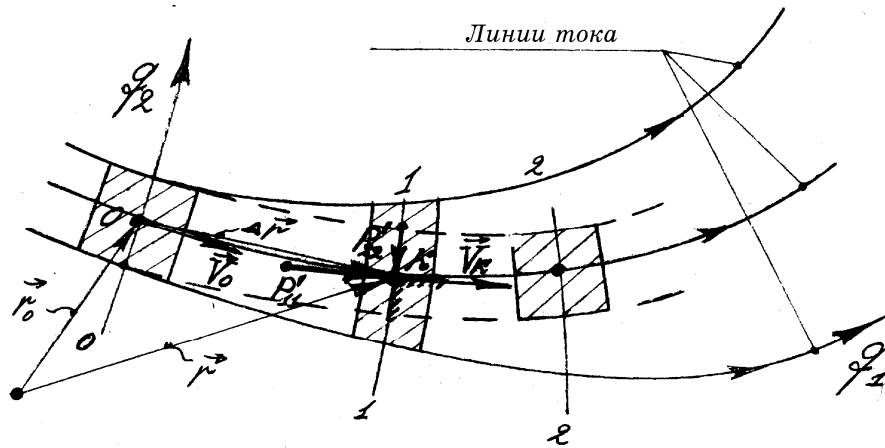


Рисунок 1 – Схема деформации частицы жидкости

Пусть скорость точки  $O$  равна  $\bar{V}_0$ , а точки  $K$  -  $\bar{V}$ . Следуя теореме Коши-Гельмгольца,

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \frac{1}{2} (\text{rot} \bar{V})_0 \times \Delta \bar{r} + (\text{def} \bar{V})_0 \Delta \bar{r},$$

изменение скорости «жидкой» частицы  $\bar{V}$  относительно её квазитвердой составляющей  $\bar{V}_{km} = \bar{V}_0 + \frac{1}{2} (\text{rot} \bar{V})_0 \times \Delta \bar{r}$  равно деформационной скорости  $\Delta \bar{V}_{def} = \bar{V} - \bar{V}_{km} = (\text{def} \bar{V})_0 \Delta \bar{r}$ .

По значению деформационной скорости деформационное ускорение определяется следующим образом:

$$\bar{a}_{def} = \frac{d\bar{V}_{def}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{V}_{def}}{\Delta t} = (def \bar{V})_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = (def \bar{V}) \bar{V}.$$

Приравняв единичные силы инерции деформационного движения «жидкой» частицы ( $-\bar{a}_{def}$ ) поверхностным силам, вызывающим деформацию частицы  $\frac{1}{\rho} Div P'$ , получим дифференциальное уравнение деформации «жидкой» частицы

$$-(def \bar{V}) \bar{V} = \frac{1}{\rho} Div P'. \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} (def \bar{V}) \bar{V} = & V \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} \right) \bar{e}_1 + \\ & + V \frac{1}{2} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial q_2} - \frac{V}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) \bar{e}_2 + \\ & + V \frac{1}{2} \left( \frac{1}{H_3} \frac{\partial V}{\partial q_3} - \frac{V}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right) \bar{e}_3. \end{aligned}$$

Знак «-» в уравнении (7) обусловлен тем, что положительному значению  $Div P'$  отвечает отрицательное значение деформационной скорости  $\Delta \bar{V}_{def}$ . Так, из рис.1. при  $Div P' > 0$ , что соответствует  $\rho'_{11} > \rho'_{22}$ , перемещение «жидкой» частицы 0-1 меньше его квазитвердого перемещения 0-2. Следуя  $\Delta \bar{V}_{def} = \bar{V} - \bar{V}_{km}$ , для данного случая, так как  $V_{km} > V$ , то  $\Delta V_{def} < 0$ , а, значит,  $a_{def} < 0$ .

Отсутствие касательных компонент тензора напряжений  $P'$  соответствует нулевым касательным компонентам скоростей сдвига тензора скоростей деформаций. На основании этого уравнение деформации (7) примет упрощенный вид:

$$-(def \bar{V}) \bar{V} = \frac{1}{\rho} Div P', \quad (8)$$

где  $(def \bar{V}) \bar{V} = V \cdot \frac{1}{H_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3$ .

Решая совместно (6) и (8), получим

$$grad \frac{V^2}{2} + \bar{\Omega} \times \bar{V} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} grad p - (def \bar{V}) \bar{V}. \quad (9)$$

Уравнение (9) представляет собой дифференциальное уравнение движения введенной в работе модели идеальной жидкости.

Уравнения (6) и (8) позволяют дать характеристику напряженного состояния жидкости. Так, исключив из этих уравнений  $Div P'$ , будем иметь

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial \rho'_{11}}{\partial q_1} \bar{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \rho'_{22}}{\partial q_2} \bar{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \rho'_{33}}{\partial q_3} \bar{e}_3 \right) = - \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3 \right).$$

Отсюда  $\rho'_{22} = \rho'_{33} = 0$ ,  $\rho'_{11} = -\frac{\rho V^2}{2}$ .

Таким образом, напряжения в направлении, перпендикулярном линии тока, одинаковы и равны  $\rho_{22} = \rho_{33} = -\rho$ , а в направлении линии тока

$$\rho_{11} = -\rho - \frac{\rho V^2}{2}. \quad (10)$$

Приведем уравнение (9) к виду, удобному для интегрирования. Положим, что массовые силы имеют потенциал, т.е. существует функция  $\Phi(x, y, z)$ , которая удовлетворяет условию  $\vec{F} = -grad \Phi$ . Для несжимаемой жидкости, для которой  $\frac{1}{\rho} grad p = grad \frac{p}{\rho}$ , уравнение (9) примет вид

$$grad \left( \Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) = -\vec{\Omega} \times \vec{V} - (def \vec{V})' \vec{V}. \quad (11)$$

Левая часть векторного равенства (11) есть вектор  $grad$  некоторой функции  $E = \Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$ . Знак равенства указывает на то, что вектор правой части также должен быть  $grad$  некоторой функцией  $\varepsilon$ , т.е.

$$grad \left( \Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) = grad \varepsilon. \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } grad \varepsilon &= - \left[ \vec{\Omega} \times \vec{V} + (def \vec{V})' \vec{V} \right] = - \left\{ \begin{aligned} & [0 \cdot \bar{e}_1 + V \Omega_3 \cdot \bar{e}_2 + (-V \Omega_2) \cdot \bar{e}_3] + \\ & + \left[ \left( \frac{V}{H_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} \right) \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3 \right] \end{aligned} \right\} = \\ &= - \left[ \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{V^2}{2} \right) \cdot \bar{e}_1 + (V \Omega_3) \cdot \bar{e}_2 + (-V \Omega_2) \cdot \bar{e}_3 \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как  $\mathit{grad} \mathcal{E} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_1} \cdot \bar{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_2} \cdot \bar{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_3} \cdot \bar{e}_3$  и учитывая, что проекция вектора  $\mathit{grad} \mathcal{E}$  на направление линии тока, первое слагаемое выражения (13), определена и равна  $\frac{1}{H_1} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{V^2}{2}$ , то  $\mathcal{E} = -\frac{V^2}{2}$ .

Из этого вытекают два важных вывода.

Первый вывод позволяет получить интеграл дифференциального уравнения (9).

Так, если  $\mathcal{E} = -\frac{V^2}{2}$ , то

$$\mathit{grad} \mathcal{E} = -\mathit{grad} \frac{V^2}{2}. \quad (14)$$

Из (12) и (14) будем иметь  $\mathit{grad} \left( \Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) = -\mathit{grad} \frac{V^2}{2} \Rightarrow \Rightarrow \mathit{grad} \left( \Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) = 0 \Rightarrow \Phi + \frac{p}{\rho} + V^2 = C_1 = \mathit{const}$ .

Для течения в поле силы тяжести, когда  $\Phi = qz$ , будем иметь

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{g} = \frac{C_1}{g} = C_2 = \mathit{const}. \quad (15)$$

Таким образом, для установившегося течения жидкости  $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = 0$ , в независимости вихревое или безвихревое течение, полученный интеграл (15) дифференциального уравнения (9) есть величина постоянная во всей области течения рассматриваемой модели идеальной жидкости.

В интеграле (15) напряжение  $p$  – это напряжение нормальное линии тока. Следуя (10), интеграл (15) выразим через напряжение  $p_{11}$ , направленное по линии тока:

$$z + \frac{p_{11}}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = C_2 = \mathit{const}.$$

Второй вывод позволяет получить выражение для вектора вихря скорости. Из (13) и (14) запишем

$$0 \cdot \bar{e}_1 + (V \cdot \Omega_3) \cdot \bar{e}_2 + (-V \cdot \Omega_2) \cdot \bar{e}_3 = \mathit{grad} \frac{V^2}{2} - \frac{V}{H_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdot \bar{e}_1. \quad (16)$$

Так как  $0 \cdot \bar{e}_1 + (V \cdot \Omega_3) \cdot \bar{e}_2 + (-V \cdot \Omega_2) \cdot \bar{e}_3 = \bar{\Omega} \times \bar{V}$ , то

$$\vec{\Omega} \times \vec{V} = \text{grad} \frac{V^2}{2} - \frac{V}{H_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdot \vec{e}_1. \quad (17)$$

Следуя (17), выражения для проекций вектора вихря скорости в выбранной криволинейной системе координат будут иметь вид

$$\Omega_1 = 0,$$

$$V\Omega_3 = V \frac{1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad (18)$$

$$-V\Omega_2 = V \frac{1}{H_3} \frac{\partial V}{\partial q_3}.$$

$$\text{Отсюда } \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = -\frac{1}{H_3} \frac{\partial V}{\partial q_3}, \quad \Omega_3 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial q_2}.$$

#### АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА

Полученный результат для рассматриваемой модели идеальной жидкости позволяет привести решение основной задачи гидромеханики к следующему виду. Сначала решается кинематическая задача по зависимостям, вытекающим из (3) и (18), и уравнению неразрывности.

Они имеют вид

$$\frac{V}{H_1 H_3} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial q_3} = -\frac{2}{H_3} \frac{\partial V}{\partial q_3}, \quad (19)$$

$$\frac{V}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial q_2} = -\frac{2}{H_2} \frac{\partial V}{\partial q_2},$$

$$\frac{1}{H_1 H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} (V H_2) = 0. \quad (20)$$

Результатом решения кинематической задачи является поле скорости.

Поле напряжений составляет содержание динамической задачи. Оно определяется по уравнению (15) и выражениям (10).

#### ОПЫТНАЯ ПРОВЕРКА И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ИНТЕГРАЛА (15)

Опытная проверка уравнения (15) проводилась на лабораторной установке, состоящей из напорного бака 1, прямолинейного участка трубопровода 2 и приборов для измерения пьезометрических высот 3 в сечениях 1-1, 2-2 и расхода жидкости 4 (рис.2). Задачей исследования являлось определение составляющих уравнения (15) и составляющих уравнения Бернулли. Скоростной напор определялся на входе в трубопровод по показаниям пьезометров  $h_1$ ,  $h_2$  и уровню жидкости в напорном баке

и сравнивался со скоростным напором  $V^2/2g$ , определяемым по измеренному расходу жидкости. Результаты измерений для трех режимов приведены в таблице 1.

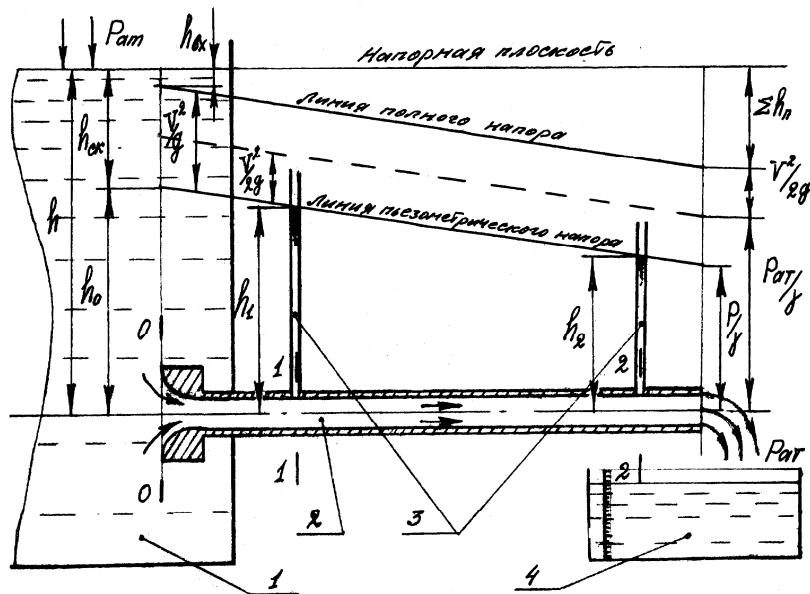


Рисунок 2 – Схема лабораторной установки

Таблица 1 – Результаты сравнения скоростных напоров

Номер Опыта	Режим течения, Re	$h_{ок} =$ $= h - h_0,$ м	$V^2/2g,$ м	$V^2/g,$ м	$\frac{h_{ок}}{V^2/2g}$	$\frac{h_{ок}}{V^2/g}$	$\zeta_{ex}$ (для $V^2/2g$ )	$\zeta_{ex}$ (для $V^2/g$ )
1	4850	0,025	0,012	0,024	2,083	1,042	1,042	0,021
2	9960	0,112	0,051	0,102	2,196	1,098	1,196	0,098
3	11500	0,147	0,067	0,134	2,194	1,097	1,190	0,089

Геометрическая интерпретация интеграла (15) представлена на рис.2. Линия пьезометрического напора отсекает напряжения, воспринимаемые стенкой трубы, -  $p = \gamma h$ . Пунктирная линия отсекает напряжения, направленные по оси трубы, -

$$p_{11} = \gamma h + \frac{\rho V^2}{2}.$$

По положению линий полного и пьезометрического напоров на входе в трубопровод оценивалась величина слагаемых интеграла (15) и сравнивалась с составляющими интеграла Бернулли. Следуя таблице, отношения напоров  $\frac{h_{ок}}{V^2/2g}$  и



$\frac{h_{\text{ок}}}{v^2/g}$ , а также им соответствующие значения коэффициентов местного сопротивления на входе  $\zeta_{\text{вх}}$  указывают на довольно хорошее согласование с опытом интеграла (15) и на значительные рассогласования интеграла Бернулли.

### ВЫВОДЫ

Предложенная модель идеальной жидкости ближе всего подходит к реальной жидкости и, по сути, соответствует понятию идеальной связи, применяемой в механике твердого тела.

Отсутствие диссипации энергии рассматриваемой модели жидкости позволило выделить главные площадки, по которым выбрана криволинейная система координат. Записанное дифференциальное уравнение деформации “жидкой” частицы оказалось удобным для замыкания системы уравнений движения жидкости в напряжениях и их приведения к виду, удобному для интегрирования.

Получены зависимости для решения основной задачи гидромеханики. Из кинематической задачи следует, что для рассматриваемой модели идеальной жидкости понятие потенциальных течений обосновательно. Все течения, за исключением однородного поля скорости, вихревые. Завихренность потока определяется выражениями (18).

Опытная проверка интеграла (15) указывает на состоятельность принятой модели течения идеальной жидкости и её приемлемость при решении гидродинамических задач.

### SUMMARY

*The model of ideal Liquid is proposed. Differential equations of motion of considered Liquid model are written. The integral of equation of Liquid motion are received.*

*Поступила в редколлегию 9 июля 2003 г.*