

## ГИДРОДИНАМИКА ТОРЦОВЫХ ДРОССЕЛЕЙ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ЖИДКОСТИ

**Н.В. Зуева, асп.**

*(Сумский государственный университет)*

При создании разнообразных роторных машин проблема герметизации подвижных элементов является актуальной задачей. Уплотнения роторов являются одними из важнейших узлов насосов и компрессоров, которые определяют их эффективность, надежность и долговечность. Широкое распространение в центробежных машинах нашли бесконтактные щелевые (радиальные и торцовые) уплотнения, уплотняющий эффект которых основан на большом гидравлическом сопротивлении щелей, образованных деталями статора и ротора. Перспективным путем совершенствования высокооборотных центробежных насосов и компрессоров является повышение их рабочих характеристик (подачи и напора) при жестких ограничениях на массогабаритные показатели, а этого можно достичь только за счет увеличения частоты вращения вала, что значительно увеличивает силы, действующие на ротор.

Следовательно, возросла необходимость в исследовании влияния уплотнений на вибрационное состояние ротора. Большинство работ, связанных с этой проблемой, посвящено исследованиям гидродинамических процессов в радиальных щелевых уплотнениях, при этом гидродинамике торцовых щелей уделяется явно недостаточное внимание. Теоретические разработки, касающиеся динамики торцовых бесконтактных уплотнений, используют довольно упрощенную модель при получении аналитических выражений. Главные упрощения касаются толщины слоя жидкости в щели, описания кинематики (сложности) движения поверхностей, образующих торцовую щель, и самого метода аналитического решения уравнений, описывающих данное течение.

Пленка жидкости, разделяющая поверхности уплотнения, является основной частью уплотнительной системы, поэтому для оценки динамики уплотнения необходимо определить ее динамические свойства, а именно динамические коэффициенты жидкой пленки, которые, в свою очередь, зависят от характера движения поверхностей, образующих уплотняющий зазор.

Рассмотрим течение вязкой жидкости в торцовом дросселе, образованном уплотняющими поверхностями торцового бесконтактного уплотнения. Для анализа гидродинамики течения через торцовый дроссель необходимо определить гидродинамические силы и моменты, действующие со стороны уплотняющей жидкости на кольцо. Для этого рассмотрим течение жидкости между двумя кольцами, одно из которых вращается. Подвижная поверхность дросселя имеет, по крайней мере, три степени свободы: может совершать поступательное движение вдоль оси вращения и вращательные движения относительно двух других взаимно перпендикулярных осей.

Ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости описывается системой уравнений Навье-Стокса и уравнением неразрывности. Удобно рассматривать эту задачу в цилиндрической системе координат (рис.1).

Предварительная оценка порядка членов уравнений показала, что в первом приближении можно пренебречь конвективными силами инерции. При этом нельзя пренебрегать влиянием центробежной силы инерции, величина которой зависит не только от величины числа Рейнольдса в направлении скольжения, но и от расхода жидкости в радиальном направлении. С уменьшением этого расхода влияние центробежных сил инерции увеличивается, что может иметь

существенное значение. Локальные силы инерции учитывают нестационарность потока, поэтому будем учитывать их для дальнейшего анализа динамики системы.

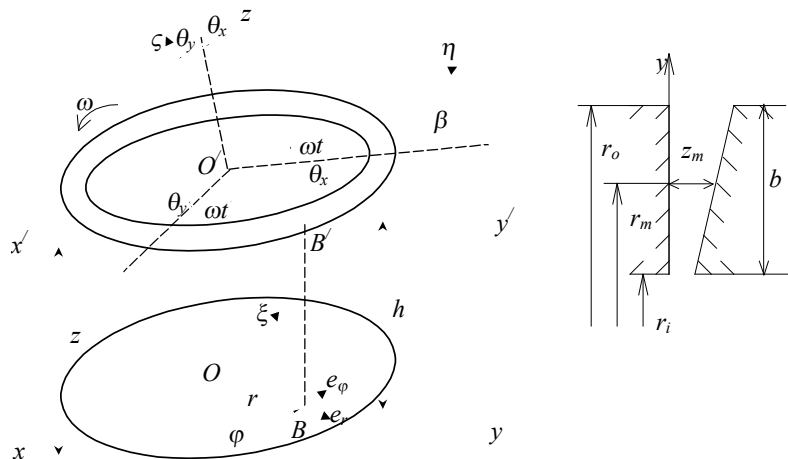


Рисунок 1 - Модель торцового дросселя

Уравнения, описывающие течения жидкости, будут зависеть от граничных условий, которые определяются геометрией торцового дросселя и динамикой подвижной торцевой поверхности.

Высота щели в любой точке может быть определена как

$$h(r, \varphi) = z \cos \theta_x \cos \theta_y + r(\sin \varphi \sin \theta_x \cos \theta_y - \cos \varphi \sin \theta_y) + (r - r_j)\beta$$

Значение скорости на вращающейся поверхности можно получить, рассматривая скорость в любой точке, как сумму переносной и относительной скоростей, т.е.

$$V = \bar{V} + \bar{\omega} \times \bar{r} = (r\omega) \bar{e}_\varphi + \left( \dot{z} + r \left( (\dot{\theta}_x + \omega \theta_y) \sin \varphi - (\dot{\theta}_y - \omega \theta_x) \cos \varphi \right) \right) \bar{e}_z$$

Таким образом осредненное уравнение движения и уравнение неразрывности

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\rho}{h} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{v}_r h) - \rho \frac{\bar{v}_\varphi^2}{r} = -\frac{k_r \mu}{h^2} \bar{v}_r \\ \frac{\partial}{\partial r} (\bar{v}_r h r) + r u_1 + r^2 u_2 = 0, \end{cases}$$

где  $h = h_0 + z + r(\theta_x \sin \varphi - \theta_y \cos \varphi) + (r - r_j)\beta$ ,

$$u_1 = k_r \mu \dot{z}, \quad u_2 = k_r \mu \left( \left( \dot{\theta}_x + \frac{\omega}{2} \theta_y \right) \sin \varphi - \left( \dot{\theta}_y - \frac{\omega}{2} \theta_x \right) \cos \varphi \right)$$

Уравнение Рейнольдса, описывающее течение жидкости, приведем к виду

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r h^3 \left( \frac{\partial p}{\partial r} + g - \frac{\rho \omega^2 r}{4} \right) \right) = u_1 r + u_2 r^2$$

$$g = \frac{\rho}{h} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{v}_r h)$$

где

Замыкающие граничные условия для давления:

$$\text{при } r = r_i \quad p = p_i, \quad \text{при } r = r_o \quad p = p_o.$$

Нахождение аналитического решения применительно к упрощенному уравнению Рейнольдса, описывающего плоское течение в преобладающем направлении, в данном случае – радиального течения:

$$p = p_i + (p_o - p_i) \frac{i_o - i_{oi}}{i_{oo} - i_{oi}} + u_1 \left( i_1 - i_{1i} - (i_{1o} - i_{1i}) \frac{i_o - i_{oi}}{i_{oo} - i_{oi}} \right) +$$

$$+ u_2 \left( i_2 - i_{2i} - (i_{2o} - i_{2i}) \frac{i_o - i_{oi}}{i_{oo} - i_{oi}} \right) + u_3 \left( i_3 - i_{3i} - (i_{3o} - i_{3i}) \frac{i_o - i_{oi}}{i_{oo} - i_{oi}} \right) -$$

$$- \left( g - g_i - (g_o - g_i) \frac{i_o - i_{oi}}{i_{oo} - i_{oi}} \right),$$

$$\text{где } i_o = \int \frac{dr}{rh^3}, \quad i_1 = \frac{1}{2} \int \frac{rdr}{h^3}, \quad i_2 = \frac{1}{3} \int \frac{r^2 dr}{h^3}, \quad i_3 = \frac{1}{4} \int r dr$$

Для нахождения составляющей давления, обусловленного учетом локальной силы инерции, из уравнения неразрывности выразим расход жидкости в радиальном направлении:

$$\bar{v}_r hr = -\frac{r^2}{2} u_1 - \frac{r^3}{3} u_2 + c_1$$

Постоянная  $c_1$  выразится через расход на входе в канал, который в первом приближении можно определить без учета сил инерции, тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{v}_r h) = -\frac{\dot{u}_1}{r} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{i_{1o} - i_{1i}}{i_{oo} - i_{oi}} \right) - \frac{\dot{u}_2}{r} \left( \frac{r^3}{3} - \frac{i_{2o} - i_{2i}}{i_{oo} - i_{oi}} \right)$$

Перейдем к безразмерным координатам

$$\bar{y} = \frac{(r - r_m)}{b/2}, \quad \text{тогда } r = r_m (1 + \lambda \bar{y}), \quad h = h_m (1 + \theta_m \bar{y}).$$

Тогда давление как функция безразмерных координат  $\bar{y}$  и  $\Phi$  представится в следующей форме:

$$\begin{aligned}
p = & p_i + \frac{p_0 - p_i}{2} \left( \bar{y} + 1 + \frac{\lambda}{2} (y^2 - 1) \right) - \\
& - \left( \frac{p_0 - p_i}{2} - \rho \omega^2 \frac{r_m b}{8} \right) \left( \frac{2\lambda + 3\theta_m}{2} (\bar{y}^2 - 1) \right) + \\
& + k_r \mu \dot{z} \frac{b^2}{8h_m^3} (\bar{y}^2 - 1) \left( 1 - \left( \frac{\lambda}{3} + 2\theta_m \right) y \right) + \\
& + k_r \mu \frac{r_m b^2}{8h_m^3} (\bar{y}^2 - 1) (1 - 2\theta_m y) \left( \left( \dot{\theta}_x + \frac{\omega}{2} \dot{\theta}_y \right) \sin \varphi - \left( \dot{\theta}_y - \frac{\omega}{2} \dot{\theta}_x \right) \cos \varphi \right) - \\
& - \rho \ddot{z} \frac{b^2}{8h_m} (y^2 - 1) \left( 1 - \frac{\lambda + 2\theta_m}{3} y \right) - \\
& - \rho \left( \left( \ddot{\theta}_x + \frac{\omega}{2} \ddot{\theta}_y \right) \sin \varphi - \left( \ddot{\theta}_y - \frac{\omega}{2} \ddot{\theta}_x \right) \cos \varphi \right) \frac{b^2 r_m}{8h_m} (y^2 - 1) \left( 1 - \frac{2\theta_m}{3} y \right),
\end{aligned}$$

где

$$\lambda = \frac{b}{2r_m}, \quad b = r_o - r_i, \quad \theta_m = \frac{(\theta_x \sin \varphi + \theta_y \cos \varphi + \beta) b / 2}{h_m},$$

$$h_m = h_0 + z + (\varphi_x \sin \varphi - \varphi_y \cos \varphi) r_m.$$

Полное давление в торцовом дросселе, полученное в результате приближенного аналитического решения уравнения Рейнольдса, представляет собой сумму гидростатического ( $P_s$ ) и гидродинамического ( $P_c$ ). Гидростатическая составляющая определяется перепадом давления на торцовом дросселе за вычетом напора, обусловленного учетом центробежной силы инерции жидкости. Гидродинамическое ( $P_c$ ) вызвано движением стенок, образующих зазор, которое, в свою очередь, учитывает вращение кольца, осевые и угловые колебания кольца (вязкая составляющая давления, обусловленная эффектом вытеснения). Последние два слагаемых учитывают нестационарность потока жидкости ( $P_g$ ).

Аналитические выражения сил и моментов, действующих со стороны жидкости на торцовую поверхность, получим как результат интегрирования:

$$\begin{aligned}
M_x = \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} p(r, \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi = & -C_{11} \theta_x - B_{11} \left( \dot{\theta}_x + \frac{\omega}{2} \dot{\theta}_y \right) - A_{11} \left( \ddot{\theta}_x + \frac{\omega}{2} \ddot{\theta}_y \right) - \\
& - C_{13} \theta_x z - B_{13} \theta_x \dot{z} - A_{13} \theta_x \ddot{z},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y = - \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} p(r, \varphi) r^2 \cos \varphi dr d\varphi = & -C_{11} \theta_y - B_{11} \left( \dot{\theta}_y - \frac{\omega}{2} \dot{\theta}_x \right) - A_{11} \left( \ddot{\theta}_y - \frac{\omega}{2} \ddot{\theta}_x \right) - \\
& - C_{13} \theta_y z - B_{13} \theta_y \dot{z} - A_{13} \theta_y \ddot{z},
\end{aligned}$$

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_0} \rho(r, \varphi) r dr d\varphi = F_{z0} - C_{33}z - B_{33}\dot{z} - A_{33}\ddot{z} - C_{31}(\theta_x^2 + \theta_y^2) - B_{31}(\dot{\theta}_x\theta_x + \dot{\theta}_y\theta_y) - A_{31}\left((\ddot{\theta}_x\theta_x + \ddot{\theta}_y\theta_y) + \frac{\omega}{2}(\dot{\theta}_y\theta_x - \dot{\theta}_x\theta_y)\right),$$

$$F_{z0} = 2\pi r_m b \left( \left( \rho_i + \frac{\rho_0 - \rho_i}{2} \right) + \left( \frac{\rho_0 - \rho_i}{2} - \rho\omega^2 \frac{r_m b}{8} \right) \left( \frac{2}{3} \lambda + \frac{b\beta}{2h_0} \right) \right),$$

где

$A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$  - силовые коэффициенты, определяющиеся выражениями:

$$C_{11} = -\frac{\pi r_m^2 b^2}{2h_0} \left( \frac{\rho_0 - \rho_i}{2} - \rho\omega^2 \frac{r_m b}{8} \right) \left( 1 - \frac{r_m \beta}{h_0} \right),$$

$$B_{11} = k_r \mu \frac{\pi r_m^3 b^3}{12h_0^3}, \quad A_{11} = -\rho \frac{\pi r_m^3 b^3}{12h_0} \left( 1 - \frac{b\beta}{2h_0} \right),$$

$$C_{13} = \frac{\pi r_m^2 b^2}{2h_0^2} \left( \frac{\rho_0 - \rho_i}{2} - \rho\omega^2 \frac{r_m b}{8} \right), \quad B_{13} = -k_r \mu \frac{\pi r_m^3 b^3}{4h_0^4}, \quad A_{13} = \rho \frac{\pi r_m^3 b^3}{12h_0^2},$$

$$C_{33} = \frac{\pi r_m b^2 \beta}{h_0^2} \left( \frac{\rho_0 - \rho_i}{2} - \rho\omega^2 \frac{r_m b}{8} \right), \quad B_{33} = k_r \mu \frac{\pi r_m b^3}{6h_0^3} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{b\beta}{h_0} \right),$$

$$A_{33} = -\rho \frac{\pi r_m b^3}{6h_0} \left( 1 - \frac{b\beta}{2h_0} \right),$$

$$C_{31} = \frac{\pi r_m^2 b^2}{2h_0^2} \left( \frac{\rho_0 - \rho_i}{2} - \rho\omega^2 \frac{r_m b}{8} \right), \quad B_{31} = -k_r \mu \frac{\pi r_m^3 b^3}{4h_0^4}, \quad A_{31} = \rho \frac{\pi r_m^3 b^3}{12h_0^2}.$$

Гидростатическая составляющая силы, действующей на кольцо, определяется перепадом давления с учетом центробежного напора и не связана с движением стенок. Из полученных выражений следует, что осевая сила увеличивается из-за конфузорности ( $\beta < 0$ ) при течении от центра к периферии ( $\Delta p = \rho_0 - \rho_i < 0$ ) и наоборот из-за диффузорности ( $\beta > 0$ ) - при течении от периферии к центру. С изменением зазора сила будет восстанавливающей при условии  $\beta \cdot \Delta p > 0$ . Так как обычно угловой перекося уплотняющих поверхностей

мал, то слагаемыми, содержащими  $(\theta_x^2 + \theta_y^2)$  и  $(\dot{\theta}_x\theta_x + \dot{\theta}_y\theta_y)$ , можно пренебречь. Гидродинамическая сила будет зависеть от скорости движения стенки и в основном определяется эффектом вытеснения при осевом колебании стенки. Ее направление зависит от направления движения стенки, и в случае осевых колебаний сила будет восстанавливающей. Нелинейные силы, содержащие угловые перемещения и скорости, характеризуют влияния угловых колебаний на осевые вибрации.

Гидростатический момент будет восстанавливающим, при истечении жидкости к внешнему радиусу ( $\Delta p < 0$ ,  $\rho_i > \rho_0$ ), причем конфузорность уменьшает величину этого момента. Гидродинамический момент обусловлен

вращением кольца с угловой скоростью  $\omega$  и эффектом вытеснения при осевой и угловой подвижности стенки. Коэффициенты, связывающие осевые колебания с угловыми, при линеаризации будут зависеть от начального угла перекоса уплотнения в положении статического равновесия.

Полученные выражения для расчета гидродинамических характеристик торцовых дросселей могут быть использованы для оценки собственных частот, амплитуд вынужденных колебаний и динамической устойчивости аксиально-подвижных колец уплотнений.

При малых колебаниях кольца силы и моменты, действующие со стороны жидкости на подвижную поверхность, линейно связаны с перемещениями  $z$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ . Поэтому для анализа динамики системы воспользуемся линеаризованными выражениями сил и моментов относительно некоторого статического положения равновесия, определяющегося малым углом перекоса  $\gamma_0$  относительно некоторой оси, положение которой в неподвижной системе координат определяется углом  $\alpha_0$ , тогда  $\theta_{x0} = \gamma_0 \cos \alpha_0$ ,  $\theta_{y0} = \gamma_0 \sin \alpha_0$ .

Система уравнений колебаний подвижного кольца

$$J\ddot{\theta}_x + J_0\omega\dot{\theta}_y + c\frac{r_m^2}{2}(\dot{\theta}_x + \omega\theta_y) + k\frac{r_m^2}{2}\theta_x = M_x + M_{xt},$$

$$J\ddot{\theta}_y - J_0\omega\dot{\theta}_x + c\frac{r_m^2}{2}(\dot{\theta}_y - \omega\theta_x) + k\frac{r_m^2}{2}\theta_y = M_y + M_{yt},$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz + k\Delta = F_z + F_t.$$

С учетом полученных гидродинамических сил и моментов уравнения колебаний

$$a_{11}\ddot{\theta}_x + b_{11}\dot{\theta}_x + c_{11}\theta_x + b_{12}\dot{\theta}_y + c_{12}\theta_y + a_{13}\theta_{x0}\ddot{z} + b_{13}\theta_{x0}\dot{z} = M_{xt},$$

$$b_{21}\dot{\theta}_x + c_{21}\theta_x + a_{22}\ddot{\theta}_y + b_{22}\dot{\theta}_y + c_{22}\theta_y + a_{23}\theta_{y0}\ddot{z} + b_{23}\theta_{y0}\dot{z} = M_{yt},$$

$$a_{31}\theta_{x0}\ddot{\theta}_x + b_{31}\theta_{x0}\dot{\theta}_x + c_{31}\theta_{x0}\theta_x + a_{32}\theta_{y0}\ddot{\theta}_y + b_{32}\theta_{y0}\dot{\theta}_y + c_{32}\theta_{y0}\theta_y + a_{33}\ddot{z} + b_{33}\dot{z} + c_{33}z = F_t,$$

где  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  - коэффициенты инерционной, диссипативной и упругой связей соответственно, причем  $k_{ij}$  ( $i \neq j$ ) - перекрестные коэффициенты, учитывающие связь угловых и осевых колебаний, причем  $k_{11} = k_{22}$ ,  $k_{12} = -k_{21}$ ,  $a_{13} = a_{23}$ ,  $b_{13} = b_{23}$ ,  $a_{31} = a_{32}$ ,  $c_{31} = c_{32}$ .

Внешние сила и моменты, действующие на кольцо  $F_t = F_a e^{i\omega t}$ ,  $M_{xt} = M_{xa} e^{i\omega t}$ ,  $M_{yt} = M_{ya} e^{i\omega t}$  вызывают колебания стенки с частотой  $\omega$ .

Решение системы ищем в виде  $z = z_a e^{i(\omega t + \varphi)}$ ,  $\theta_x = \theta_{xa} e^{i(\omega t + \varphi)}$ ,  $\theta_y = \theta_{ya} e^{i(\omega t + \varphi)}$ .

Если пренебречь связью угловых и осевых колебаний (коэффициенты связи равны нулю) система распадается на две независимых: осевые и связанные угловые колебания. Тогда несвязанные колебания представляются в виде

$$D_{11}\theta_x + D_{12}\theta_y = M_{xt}, \quad D_{21}\theta_x + D_{22}\theta_y = M_{yt}, \quad D_{33}z = F_t.$$

Решение такой системы значительно упрощается. Упрощается и условие устойчивости для несвязанных колебаний. Амплитудно-фазовые частотные характеристики для такой системы представлены на рисунке 2.

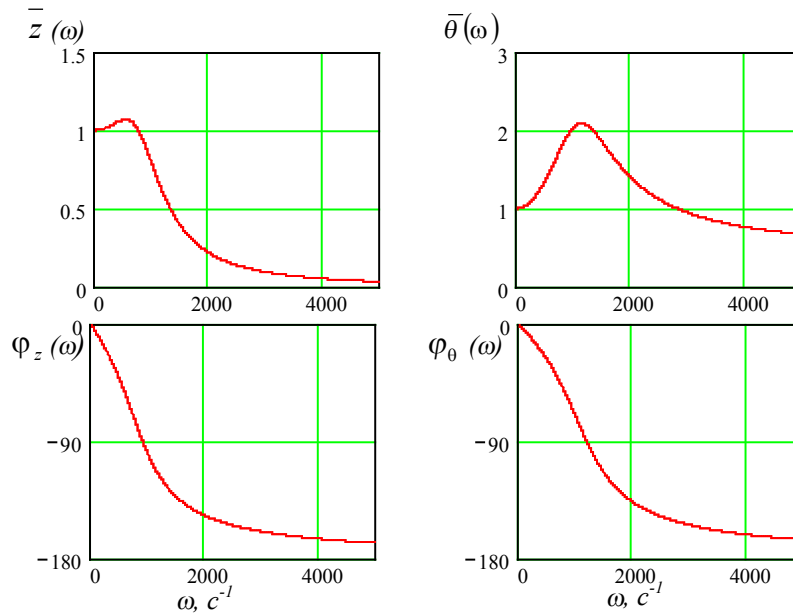


Рисунок 2 – Амплитудно-фазовые частотные характеристики осевых и угловых колебаний

Условие устойчивости несвязанной системы колебаний сводится к условию положительности коэффициентов характеристического уравнения для осевых и угловых колебаний, а также для связанных угловых колебаний:

$$b_{11}^2 c_{11} + b_{11} b_{12} c_{12} - a_{11} c_{12}^2 > 0$$

Из этого условия найдем частоту, при которой система перейдет в неустойчивую область

$$\omega^2 < \frac{\left( c \frac{r_m^2}{2} + B_{11} \right)^2 \left( k \frac{r_m^2}{2} + C_{11} \right)}{\left( c \frac{r_m^2}{2} + 0.5 B_{11} \right) \left( c \frac{r_m^2}{2} (J - J_0) + B_{11} (J/2 - J_0) + c \frac{r_m^2}{2} \frac{A_{11}}{2} \right)}$$

Учет центробежной силы инерции расширяет область устойчивости, однако учет локальной составляющей силы инерции уменьшает критическое значение частоты вращения ( $A_{11} > 0$ ), при которой система теряет устойчивость. Если

$$\left( c \frac{r_m^2}{2} (J - J_0) + B_{11} (J/2 - J_0) + c \frac{r_m^2}{2} \frac{A_{11}}{2} \right) < 0$$

, то условие устойчивости выполняется на всем диапазоне частот, знак этого выражения будет определяться отношением моментов инерции.

Для осевых колебаний коэффициент жесткости будет положителен при

условии

$$k + C_{33} = k + \frac{\pi r_m b^2 \beta}{h_0^2} \left( \frac{\rho_0 - \rho_i}{2} - \rho \omega^2 \frac{r_m b}{8} \right) > 0$$

Так как  $C_{33}$  зависит от направления течения и угла конусности, а также от частоты вращения, то условие устойчивости при  $\beta > 0$  и  $k + \frac{\pi r_m b^2 \beta}{h_0^2} \frac{\rho_0 - \rho_i}{2} > 0$

$$\omega^2 < \frac{k + \frac{\pi r_m b^2 \beta}{h_0^2} \frac{\rho_0 - \rho_i}{2}}{\frac{\pi r_m b^2 \beta}{h_0^2} \rho \frac{r_m b}{8}}$$

что практически важно, когда окружная скорость и скорость основного потока сравнимы при течении жидкости от центра к периферии (при  $\Delta p < 0$ ).

При условии  $\beta < 0$  учет центробежной силы инерции увеличивает коэффициент жесткости системы.

## SUMMARY

*Flow of a viscous incompressible liquid in the face gap and its influence on seal dynamics is investigated in the work. Influence of inertia forces just a local component of inertia forces and centrifugal force, which increases at the big rotation speeds, was taken into account at the analysis.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марцинковский В.А. Бесконтактные уплотнения роторных машин. - М.: Машиностроение, 1980.-200с.
2. Ден Этсион. Исследование колебаний торцевого уплотнения // Проблемы трения.-1981.-Т.103, №34. - С.104-112.
3. Kundera Cz. Aktywne uszczelnianie drgających elementów wirujących. – Kielce: Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej.-1999. – 115 s.
4. Уплотнения и уплотнительная техника: Справочник / Под общей ред. Л.А. Кондакова, А.И. Голубева, В.Б. Овандера и др. - М.: Машиностроение, 1986. – С. 246 – 284.

*Поступила в редколлегию 28 января 2003г.*