

ВЛИЯНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ НА МОЩНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ТОКАРНОЙ ОБРАБОТКЕ ДЕТАЛИ

В. И. Савчук, канд. техн. наук;

Л. С. Кафтарян, доцент;

С. А. Гордиенко,

Сумский государственный университет, г. Сумы

В работе проведен анализ влияния момента инерции на мощность, необходимую для обработки крестовины на стадии токарной обработки. Выполнен анализ влияния момента инерции на колебательные процессы, происходящие в зоне обработки детали, определена частота собственных колебаний детали, при которой возникают резонанс и амплитуда ее колебаний, влияющих на жесткость обрабатываемой детали.

Ключевые слова: *момент инерции, амплитуда, колебания, крестовина, демпфирование.*

У роботі проведений аналіз впливу моменту інерції на потужність, необхідну для обробки хрестовини на стадії токарної обробки. Виконаний аналіз впливу моменту інерції на коливальні процеси, що відбуваються в зоні обробки деталі, визначена частота власних коливань деталі, при якій виникають резонанс і амплітуда її коливань, що впливають на жорсткість оброблюваної деталі.

Ключові слова: *момент інерції, амплітуда, коливання, хрестовина, демпфірування.*

В современном машиностроении имеет место обработка деталей с пересекающимися осями (см. рисунок 1). При обработке таких деталей на операциях точения массы деталей, не участвующих в резании, оказывают влияние на силу закрепления, что требует увеличения мощности, необходимой для обеспечения жесткости технологической системы. Возникающий момент инерции и колебания, которые вызываются действием крутящего момента, вызванного тангенциальной составляющей силы резания, приводят к "скручиванию" детали. Перечисленные явления приводят к необходимости повысить силу закрепления, а следовательно, увеличивать и потребляемую мощность станка. Кроме того, повышение момента скручивания при определенных режимах резания нарушает целостность формы поверхности заготовки.

Названные факторы необходимо учитывать при выборе модели станка, технологической оснастки (патрона), а в некоторых случаях при разработке принципиально новых конструкций патрона.

Анализ патентно-литературных источников [1, 2] показал, что отсутствуют какие-либо расчеты, связанные с влиянием момента инерции и колебаний масс детали при построении структуры токарных операций.

Нами проведено исследование для детали «крестовина», которая входит в конструкцию карданной передачи (см. рисунок 1).

Известно, что при вращательном движении тела мерой его инертности является момент инерции данного тела. Выполним расчет момента инерции для детали «крестовина» (в дальнейшем именуемое «тело»), условно разделив это тело на составные части. Массы тела m_1 и m_2 сосредоточены вдоль оси ОХ, массы тела m_3 и m_4 сосредоточены вдоль оси ОУ, причем $m_1 = m_2$, а $m_3 = m_4$. Производим расчет каждой части по

отдельности и суммируя их, находим момент инерции вращающегося тела вокруг оси x :

$$J_0 = J_1 + 2J_2, \quad (1)$$

где J_0 - момент инерции тела, $\text{м}^2 \cdot \text{кг}$;

J_1 - момент инерции части тела вдоль оси OX , $\text{м}^2 \cdot \text{кг}$;

J_2 - момент инерции части тела вдоль оси OY , $\text{м}^2 \cdot \text{кг}$.

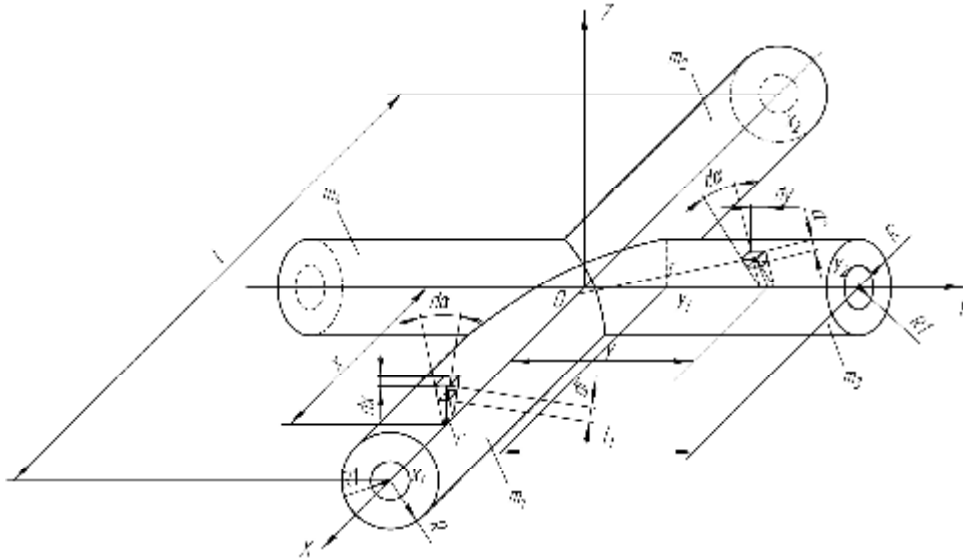


Рисунок 1 – Схематизированная конструкция детали крестовины

Таблица 1 – Геометрические и физические параметры тела

ρ , кг/м^3	$R \cdot 10^{-3}$, м^3	$R_1 \cdot 10^{-3}$, м^3	$l \cdot 10^{-3}$, м^3	$l_1 \cdot 10^{-3}$, м^3
7800	10,25	2,5	64	24

Определим момент инерции масс тела, расположенных вдоль оси OX :

$$J_1 = \int_V r^2 dm.$$

Определим элементарную массу тела по формуле

$$dm = \rho dV = \frac{m_1 + m_2}{\pi(R^2 - R_1^2)} r dr dx dz.$$

$$\text{Тогда } J_1 = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^R r^3 \frac{m_1 + m_2}{\pi l (R^2 - R_1^2)} d\alpha dx dz = \frac{(m_1 + m_2)(R^2 + R_1^2)}{2}. \quad (2)$$

Аналогично определяем момент инерции массы тела, расположенного вдоль оси OY :

$$J_2 = \int_V r^2 dm.$$

Определим элементарную массу тела и расстояние к этой массе по формулам:

$$dm = \rho dV = \frac{m_3}{\pi l_1 (R^2 - R_1^2)} r d\alpha dr dy,$$

$$\tau = \sqrt{y^2 + (r \sin \alpha)^2}.$$

Тогда, $J_2 = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^R \int_{y_1}^{y_2} \frac{(y^2 + (r \sin \alpha)^2) m_3}{\pi l_1 (R^2 - R_1^2)} r d\alpha dr dy = m_3 \left(\frac{l_1^2}{3} + \frac{(R^2 + R_1^2)}{4} \right).$ (3)

Суммируя выражения (2) и (3), определяем момент инерции всей массы тела:

$$J_0 = \frac{(m_1 + m_2)(R^2 + R_1^2)}{2} + 2m_3 \left(\frac{l_1^2}{3} + \frac{(R^2 + R_1^2)}{4} \right). \quad (4)$$

Так как внутри крестовины расположены отверстия, а в месте их пересечения масса крестовины отсутствует, то с учетом такой конструкции тела момент инерции будет иметь следующий вид:

$$J_0 = \frac{(m_1 + m_2)(R^2 + R_1^2)}{2} + 2m_3 \left(\frac{l_1^2}{3} + \frac{(R^2 + R_1^2)}{4} \right) - 0,1 \left(\frac{(m_1 + m_2)(R^2 + R_1^2)}{2} + 2m_3 \left(\frac{l_1^2}{3} + \frac{(R^2 + R_1^2)}{4} \right) \right).$$

$$J_0 = 0,9 \left(\frac{(m_1 + m_2)(R^2 + R_1^2)}{2} + 2m_3 \left(\frac{l_1^2}{3} + \frac{(R^2 + R_1^2)}{4} \right) \right). \quad (5)$$

С учетом таблицы 1 и формулы (5) момент инерции примет значение

$$J_0 = 3,076 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Определим мощность, необходимую для обработки данного тела.

Согласно теореме об изменении кинетической энергии системы в дифференциальном виде

$$dT = \sum dA \left(\vec{F}_K^E \right) + \sum dA \left(\vec{F}_K^I \right). \quad (6)$$

В интегральном виде

$$T - T_0 = \sum A \left(\vec{F}_K^E \right) + \sum A \left(\vec{F}_K^I \right), \quad (7)$$

где T - кинетическая энергия тела в процессе вращения, Дж;

T_0 - кинетическая энергия тела в начальный момент времени, Дж;

$\sum A \left(\vec{F}_K^E \right)$ - сумма работ внешних сил, Дж;

$\sum A \left(\vec{F}_K^I \right)$ - сумма работ внутренних сил, Дж.

Кинетическая энергия тела в начальный момент времени $T_0 = 0$, так как тело покоилось. Кинетическая энергия тела в процессе вращения

$$T = \frac{I_0 \omega^2}{2}, \quad (8)$$

где ω - угловая скорость вращения тела, c^{-1} .

Сумма работ внутренних сил $\sum A \left(\vec{F}_K^I \right) = 0$, так как система не изменяема.

Работу внешних сил определим по формуле (см. рисунок 2)

$$\sum A \left(\vec{F}_K^E \right) = M\varphi - M_p\varphi - P_0\varphi = M\varphi - F_p R\varphi, \quad (9)$$

где M - крутящий момент, передаваемый от шпинделя станка, Н·м;

M_p - момент силы резания, Н·м;

φ - угол поворота детали, рад;

R - радиус обрабатываемой поверхности, м;

F_p - сила резания, Н.

Тогда согласно теореме об изменении кинетической энергии системы

$$\frac{J_0 \omega^2}{2} = M\varphi - F_p R\varphi.$$

$$M = \frac{J_0 \omega^2}{2\varphi} + F_p R = \frac{J_0 \omega^2 + 2F_p R\varphi}{2\varphi}.$$

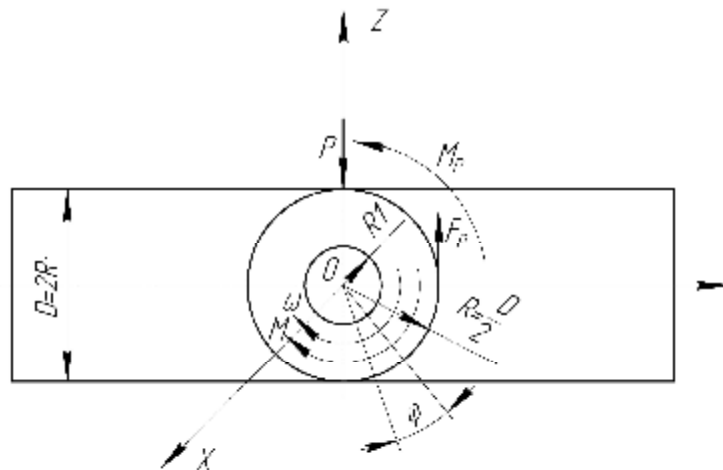


Рисунок 2 – Схема сил, действующих на тело

Определим необходимую мощность на шпинделе

$$N = M\omega = \frac{J_0\omega^2 + 2F_p R\varphi}{2\varphi} \omega = \frac{J_0 \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 + 2F_p R\varphi}{2\varphi} \cdot \frac{\pi n}{30}. \quad (10)$$

Из зависимости (10) видно, что при выборе станка необходимо учитывать не только силу резания, а и момент инерции тела.

Силу резания определяем по рекомендациям работы [3].

Тангенциальная составляющая силы резания равна: $F_p = 943 \text{ Н}$.

Частоту вращения определяем по рекомендациям работы [3].

Частота вращения шпинделя равна $n = 2000 \text{ мин}^{-1}$.

Выполняем расчет согласно (10):

$$N = \frac{3,076 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 2000}{30}\right)^2 + 2 \cdot 943 \cdot 0,01025 \cdot 2 \cdot \pi}{2 \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \frac{\pi \cdot 2000}{30} = 2,1 \text{ кВт}.$$

Расчет показал, что момент инерции влияет на необходимую мощность при обработке детали. Влияние момента инерции на мощность составляет в данном случае 4,9% от общей мощности, а 95,1% приходится на силу резания. В то же время на чистовых токарных операциях, где силы резания меньше, чем при черновой обработке, а частота вращения детали выше, то влияние момента инерции на мощность обработки возрастает.

Рассмотрим влияние момента инерции на жесткость обрабатываемой детали.

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения тела (см. рисунок 2) согласно [4].

$$J_0 \ddot{\varphi} = -k\varphi - c\dot{\varphi} + M_p, \quad (11)$$

где J_0 - момент инерции тела относительно оси вращения, $\text{кг}\cdot\text{м}^2$;

$\ddot{\varphi}$ - угловое ускорение крестовины, с^{-2} ;

k - крутящий момент, действующий со стороны шпинделя, $\text{Н}\cdot\text{м}$;

φ - угол кручения, рад;

c - постоянная, зависящая от силы демпфирования;

$\dot{\varphi}$ - угловая скорость крестовины, с^{-1} ;

M_p - момент силы резания, $\text{Н}\cdot\text{м}$.

Момент силы резания запишем согласно [4] в виде

$$M_p = (F_1 + F_2 \sin \omega t) R, \quad (12)$$

где F_1 - средняя сила резания, Н ;

F_2 - амплитуда силы резания, Н ;

ω - частота вынужденных колебаний, с^{-1} ;

t - время колебаний, с .

$$J_0 \ddot{\varphi} = -k\varphi - c\dot{\varphi} + (F_1 + F_2 \sin \omega t) R,$$

сделаем замену $\phi = \varphi - \frac{F_1 R}{k}$, тогда $\varphi = \phi + \frac{F_1 R}{k}$, $\dot{\varphi} = \dot{\phi}$, $\ddot{\varphi} = \ddot{\phi}$.

Новое уравнение примет вид:

$$J_0 \ddot{\phi} = -k \left(\phi + \frac{F_1 R}{k} \right) - c \dot{\phi} + (F_1 + F_2 \sin \omega t) R. \quad (13)$$

После преобразования формулы (13) получаем:

$$J_0 \ddot{\phi} + c \dot{\phi} + k \phi = F_2 R \sin \omega t,$$

$$\ddot{\phi} + \frac{c}{J_0} \dot{\phi} + \frac{k}{J_0} \phi = \frac{F_2 R}{J_0} \sin \omega t.$$

Сделаем замену:

$$\frac{c}{J_0} = 2n, \quad \frac{k}{J_0} = p^2.$$

С учетом замены получаем уравнение

$$\ddot{\phi} + 2n \dot{\phi} + p^2 \phi = \frac{F_2 R}{J} \sin \omega t. \quad (14)$$

Полученное дифференциальное уравнение 2-го порядка решается суммированием решений общего решения однородного уравнения 2-го порядка и частного решения уравнения (14).

Решим однородное уравнение вида

$$\ddot{\phi} + 2n \dot{\phi} + p^2 \phi = 0. \quad (15)$$

Решение уравнения запишем в виде

$$\phi = e^{r \cdot t}, \quad \dot{\phi} = r e^{r \cdot t}, \quad \ddot{\phi} = r^2 e^{r \cdot t}. \quad (16)$$

Подставляем (16) в однородное уравнение (15):

$$r^2 e^{rt} + 2nr e^{rt} + p^2 e^{rt} = 0.$$

$$r^2 + 2nr + p^2 = 0.$$

$$r = \frac{-2n \pm \sqrt{4n^2 - 4p^2}}{2} = -n \pm \sqrt{n^2 - p^2}.$$

Обозначим $p_1^2 = n^2 - p^2$.

В двух случаях, когда $n^2 > p^2$, $n^2 = p^2$, решения представляют собой монотонно убывающие функции, апериодические решения. Данные решения не представляют интерес, так как не содержат периодических функций, а значит не характеризуют колебательные процессы.

Пусть $n^2 < p^2$, тогда $r_1 = -n + p_1 i$, $r_2 = -n - p_1 i$.

Сумма или разность этих решений также будет решением:

$$\phi_1 = \frac{C_1}{2} (e^{r_1 t} + e^{r_2 t}) = C_1 e^{-nt} \cos p_1 t,$$

$$\phi_2 = \frac{C_2}{2i} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) = C_2 e^{-nt} \sin p_1 t.$$

Общее решение однородного уравнения (15):

$$\phi_{12} = C_1 e^{-nt} \cos p_1 t + C_2 e^{-nt} \sin p_1 t = e^{-nt} (C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t).$$

Определим константы из условия, что начальный момент времени $t = 0$, тело повернулось на угол ϕ_0 от начального положения, и начальная скорость вращения крестовины $\dot{\phi}_0 = 0$. Подставляя, найдем:

$$C_1 = \phi_0, \quad C_2 = \frac{\dot{\phi}_0 + n\phi_0}{p_1},$$

$$\phi_{12} = e^{-nt} \left(\phi_0 \cos p_1 t + \frac{\dot{\phi}_0 + n\phi_0}{p_1} \sin p_1 t \right). \quad (17)$$

Данное решение (17) представляет собой закон собственных колебаний в теле.

Частное решение исходного уравнения (14) будем искать в виде

$$\phi_3 = Q \sin \omega t + S \cos \omega t. \quad (18)$$

Находим $\dot{\phi}_3$ и $\ddot{\phi}_3$ и подставляем в исходное уравнение (14). Методом неопределенных коэффициентов найдем значения Q и S:

$$Q = \frac{F_2 R}{J_0} \cdot \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 n^2},$$

$$S = -\frac{F_2 R}{J} \cdot \frac{2\omega n}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 n^2}.$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения (14):

$$\phi_3 = \frac{F_2 R}{J_0} \cdot \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 n^2} \sin \omega t - \frac{F_2 R}{J_0} \cdot \frac{2\omega n}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 n^2} \cos \omega t.$$

Данное решение ϕ_3 представляет собой закон вынужденных колебаний в теле.

Общее решение исходного уравнения (14):

$$\phi = \phi_{12} + \phi_3 = e^{-nt} \left(\phi_0 \cos p_1 t + \frac{\dot{\phi}_0 + n\phi_0}{p_1} \sin p_1 t \right) +$$

$$+ \frac{F_a R}{J} \cdot \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 n^2} \sin \omega t - \frac{F_a R}{J} \cdot \frac{2\omega n}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 n^2} \cos \omega t.$$

Перейдем к исходной функции φ :

$$\varphi = e^{-nt} \left(\phi_0 \cos p_1 t + \frac{\dot{\phi}_0 + n\phi_0}{p_1} \sin p_1 t \right) + \frac{F_a R}{J} \cdot \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 n^2} \sin \omega t - \frac{F_a R}{J} \cdot \frac{2\omega n}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 n^2} \cos \omega t + \frac{F_1 R}{k}.$$

Величина $\frac{F_1 R}{k}$ является статической деформацией обрабатываемого тела.

Определим резонанс, который возникает при вынужденных колебаниях по формуле:

$$A = \sqrt{Q^2 + S^2}, \text{ тогда с учетом преобразований}$$

$$A = \frac{F_2 R}{J_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 n^2}} = \frac{F_2 R}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\frac{2n}{p}\right)^2 \frac{\omega^2}{p^2}}}. \quad (19)$$

Из зависимости наглядно видно, что с увеличением момента инерции амплитуда колебаний в теле уменьшается, и увеличивается его жесткость.

Величину k крутящего момента определим по формуле согласно [4]:

$$k = \frac{\pi G (D^4 - D_1^4)}{32 l_1}, \quad (20)$$

где D - наружный диаметр обрабатываемой детали, м;

D_1 - внутренний диаметр обрабатываемой детали, м;

G - модуль упругости второго рода, Па;

l_1 - длина консольной части, м.

Модуль упругости второго рода определим согласно [5]:

$G = 8,1 \cdot 10^{10}$ Па.

$$k = \frac{\pi \cdot 8,1 \cdot 10^{10} \left((20,5 \cdot 10^{-3})^4 - (5 \cdot 10^{-3})^4 \right)}{32 \cdot 24 \cdot 10^{-3}} = 5,831 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Определим частоту собственных колебаний тела по формуле

$$p = \sqrt{\frac{k}{J_0}} = \sqrt{\frac{5,831 \cdot 10^4}{3,076 \cdot 10^{-5}}} = 4,354 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

Частота вынужденных колебаний равняется частоте вращения шпинделя

$$\omega = \frac{\pi}{30} \cdot 2000 = 210 \text{ с}^{-1}.$$

Проанализируем выражение $\frac{2n}{p}$, от которого зависит амплитуда колебаний тела. Пусть имеем выражение

$$\frac{2n}{p} = \frac{c}{J_0 p}. \quad (21)$$

В выражении (21) величина c - постоянная, от которой зависит сила демпфирования. Видим, что с изменением величины c изменяется и значение выражения $\frac{2n}{p}$, а соответственно и амплитуда колебаний. Пусть

выражение $\frac{2n}{p}$ принимает значения: 0,1; 0,3; 0,5; 0,8 (см. рисунок 3).

Тогда амплитудно-частотная характеристика будет иметь вид согласно [4]:

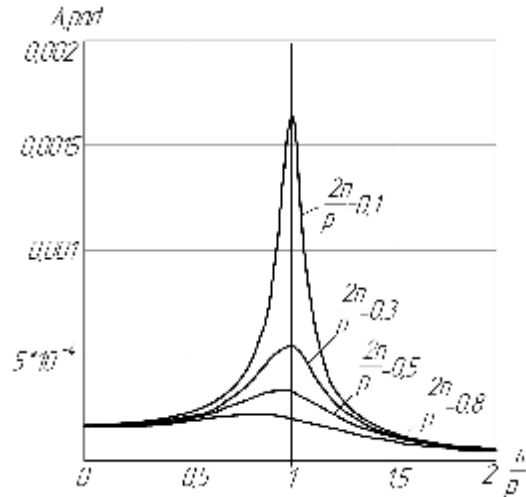


Рисунок 3 – Амплитудно – частотная характеристика колебаний в обрабатываемом теле

Из амплитудно – частотной характеристики колебаний тела видно, что с уменьшением постоянной c увеличивается амплитуда колебаний в теле, уменьшаются затухания колебаний в теле, а также уменьшается сила демпфирования – сила неупругого сопротивления тела.

Рассмотрим понятие допустимого угла закручивания, который характеризует жесткость изделия:

$$[\Theta] = 2 \frac{\text{град}}{\text{м}} = 2 \cdot \frac{\pi}{180 \cdot 1000} = 3,49 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{мм}}.$$

Рассмотрим закручивание тела при рабочей частоте $\omega = 210 \text{ с}^{-1}$:

$$\Theta = \frac{A}{l} = \frac{0,0002}{24} = 8,33 \cdot 10^{-6} \frac{\text{рад}}{\text{мм}}.$$

При резонансе для $\frac{2 \cdot n}{p} = 0,1$:

$$\Theta = \frac{A}{l} = \frac{0,0017}{24} = 7,08 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{мм}},$$

что превышает допустимый предел, а значит материал разрушится.

Для предотвращения названных явлений в технологической системе (резец, обрабатываемая деталь, приспособление) необходимо создавать демпферы, которые будут препятствовать возрастанию амплитуды колебаний и способствовать затуханию колебаний, возникающих в обрабатываемом теле. Для уменьшения амплитуды колебаний тела к основной механической системе необходимо присоединять динамические гасители колебаний в виде упругого элемента или “по схеме маятника” согласно [6], тем самым увеличивая момент инерции системы, что приведёт к уменьшению её колебаний.

ВЫВОДЫ

Расчет показал, что момент инерции влияет на необходимую мощность при обработке детали. Влияние момента инерции на мощность составляет в данном случае 4,9% от общей мощности, а 95,1% приходится на силу резания. В то же время на чистовых токарных операциях, где силы резания меньше, чем при черновой обработке, а частота вращения детали выше, влияние момента инерции на мощность обработки возрастает. Этот фактор следует учитывать при написании технологического процесса и выборе модели станка для выполнения операции.

Установлено, что на жесткость обрабатываемой детали влияют момент инерции обрабатываемой детали и колебательные процессы в технологической системе. С увеличением момента инерции обрабатываемого тела амплитуда колебаний в теле уменьшается. С увеличением амплитуды колебаний в детали уменьшается жесткость детали, а соответственно и точность обработки. При наступлении явления резонанса деталь “теряет” свою жесткость и может разрушиться.

SUMMARY

INFLUENCE OF MOMENT OF INERTIA ON POWER AND INFLEXIBILITY AT LATHE TREATMENT OF DETAIL.

V.I. Savchuk, L.S. Kaftaryan, S.A. Gordienko
Sumy State University

Was made the analysis of influencing of moment of inertia on power necessary for treatment of detail trunnion, on the stage of lathe treatment, in this work. Was made the analysis of influencing of moment of inertia on oscillation processes, that happened in the area of treatment of detail, defined the frequency of own oscillations of detail which causes resonance and amplitude of its oscillations, influencing on inflexibility of the processed detail.

Key words: *moment of inertia, oscillation, crossbar, demping.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Патент США №3879045. Зажимной патрон с датчиком позиций. МПК В23В 31/36, опубл. 22.10.1975 год..
2. Патент США №4505488. Автоматический зажимной патрон. МПК В23В 31/34, опубл. 19.03.1985 год..
3. Справочник технолога-машиностроителя. В 2 т. /Под ред. А.Г. Косиловой и Р.К. Мещерякова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1986. - Т. 1. – 656 с., ил.
4. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле: учеб. для техн. вузов – 2-е изд., перераб. а доп. – М.: Высш. шк., 1959. – 440 с.: ил.
5. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов: учеб. для техн. вузов – 5-е изд., перераб. и доп./ А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.: ил.
6. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник: в 3 томах. / Под. ред. И.А. Биргоро, Я.Г. Пановко. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1968. -Том 3. - 569 с., с ил.

Поступила в редакцию 25 ноября 2009 г.